Premi Abel 2014: Yakov G. Sinai (1935–)

L'Acadèmia Noruega de Ciències i Lletres ha resolt concedir el premi Abel 2014 a Yakov Sinai «per les seves contribucions fonamentals als sistemes dinàmics, la teoria ergòdica i la física matemàtica». El premi inclou sis milions de corones noruegues (aproximadament 709.000 euros). En aquest text discutiré alguns dels grans assoliments de Sinai en matemàtiques. En comptes d'intentar ser exhaustiu, em limitaré a un enfocament més modest, potser en alguns llocs esbiaixat cap als meus propis interessos, però tot i així informatiu i assequible per matemàtics que no treballen en l'àrea dels sistemes dinàmics. Després d'una breu ressenya biogràfica, descriuré primer alguns aspectes importants de les principals àrees de la teoria dels sistemes dinàmics que estan més a prop del treball de Sinai.

Una breu ressenya biogràfica

Sinai va néixer a Moscou el 1935. Els seus pares eren tots dos microbiòlegs i el seu avi (Benjamin Kagan, pare de la seva mare) va ser matemàtic a la Universitat Estatal de Moscou. Sinai va entrar a la Facultat de Mecànica i Matemàtiques d'aquesta mateixa universitat el 1952, l'any en què el seu avi es va jubilar. Mentre encara era estudiant, i sota la direcció de Dynkin, el 1957 Sinai va publicar el seu primer article, sobre el comportament d'una suma de variables aleatòries independents.

El premi Abel 2014, Yakov G. Sinai, en una fotografia recent.

També el 1957, Sinai es va llicenciar i va començar a treballar en la seva tesi doctoral sota la direcció de Kolmogorov, un dels més grans matemàtics del segle XX. El treball de Kolmogorov va tenir un gran impacte en moltes branques de la matemàtica moderna, incloent l'anàlisi harmònica, la teoria de la probabilitat, els processos estocàstics, la teoria de conjunts, la teoria de la informació i els sistemes dinàmics. Sinai va obtenir el títol de doctor el 1960 i es va convertir en investigador al Laboratori de Mètodes Probabilístics i Estadístics de la Universitat Estatal de Moscou, fins el 1971.

El treball que va produir durant el període 1957–1960, com molts altres treballs posteriors, va tenir un impacte profund en diverses branques de les matemàtiques, amb especial èmfasi en els sistemes dinàmics, la teoria ergòdica i la física estadística. Durant aquest període inicial va publicar en particular treballs sobre el concepte d'entropia d'un sistema dinàmic (un concepte fonamental per a la teoria ergòdica), els fluxos amb entropia finita, el teorema central del límit per a fluxos geodèsics en varietats de curvatura negativa i els processos de Markov estacionaris.

El 1971, Sinai va acceptar el càrrec d'investigador principal a l'Institut Landau de Física Teòrica de l'Acadèmia de les Ciències de la URSS. També ensenyava a la Universitat Estatal de Moscou, però no es va convertir en professor fins l'any 1981, per raons polítiques relacionades amb la signatura el 1968 d'una carta en defensa d'Esenin-Volpin, un matemàtic i poeta que liderava un moviment pels drets humans a l'antiga Unió Soviètica. El 1993 esdevingué professor al Departament de Matemàtiques de la Universitat de Princeton. Va romandre com

a investigador a l'Institut Landau, però va renunciar al seu càrrec a la Universitat Estatal de Moscou. Avui dia segueix mantenint les seves càtedres a la Universitat de Princeton i a l'Institut Landau.

Sinai ha estat àmpliament reconegut amb nombrosos premis. Ja el 1962 va ser convidat al Congrés Internacional de Matemàtics a Estocolm, en un moment d'agitació a l'antiga Unió Soviètica. En particular, va rebre la Medalla Boltzmann de la Comissió de Física Estadística de la Unió Internacional de Física Pura i Aplicada (1986), el premi Heineman de física matemàtica de la Societat Americana de Física (1990), el premi Markov de l'Acadèmia de Ciències de la URSS (1990), la Medalla Dirac del Centre Internacional de Física Teòrica de Trieste (1992), el premi Wolf en matemàtiques de la Fundació Wolf d'Israel (1997), el premi Moser del SIAM (2001), el premi Nemmers en matemàtiques de la Universitat Nord-occidental (Illinois) (2002), la Medalla Kolmogorov de la Universitat de Londres (2007), el premi Lagrange de l'Institut d'Intercanvi de Ciència de Torí (2008), el premi Poincaré de l'Associació Internacional de Física Matemàtica (2009), el premi Dobrushin de l'Institut de Transmissió de la Informació de l'Acadèmia de Ciències de la URSS (2009) i el premi Steele de la Societat Americana de Matemàtiques (2013). És membre de l'Acadèmia Nacional de Ciències dels Estats Units, de l'Acadèmia Russa de Ciències i de l'Acadèmia de Ciències d'Hongria.

Finalment, és important assenyalar que Sinai ha influenciat diverses generacions de matemàtics excepcionals. Entre els seus estudiants es troben, per exemple: Blank, Bleher, Bunimovich, Chernov, Dolgopyat, Gurevich, Jacobson, Jitomirskaya, Katok, Khanin, Kifer, Kramli, Margulis, Oseledets, Ratner, Soshnikov, Stepin i Suhov.

Sistemes dinàmics i teoria ergòdica

La teoria dels sistemes dinàmics (tant per temps discret com continu, o fins i tot per temps «de dimensió superior» donat per una acció d'un grup) és molt àmplia i molt activa en termes de recerca. També depèn substancialment de la majoria de les principals àrees de les matemàtiques. Aquí em concentraré en la discussió de temes relacionats amb la inestabilitat i el comportament estocàstic d'una dinàmica. Aquests són alguns dels temes principals en l'obra de Sinai. En termes generals, l'objectiu és cercar les relacions entre l'ordre i el caos, que avui se sap que estan íntimament relacionats.

En particular, molts sistemes deterministes exhibeixen comportament caòtic i moltes vegades les propietats estocàstiques d'un sistema caòtic poden proporcionar prediccions rigoroses.

Sovint hi ha una interacció entre diverses característiques que fan possible l'existència de comportament caòtic. En particular, un dels paradigmes de la teoria és que la inestabilitat local de les trajectòries influeix el comportament global del sistema permetent l'existència de comportament caòtic. Matemàticament, la inestabilitat de les trajectòries sovint correspon a certa hiperbolicitat, com l'observada per exemple en conjunts hiperbòlics. Un conjunt hiperbòlic per a un difeomorfisme és un conjunt invariant compacte tal que la derivada de l'aplicació contrau i expandeix, respectivament, al llarg de direccions complementàries en cada punt. En el cas dels fluxos geodèsics, els exemples inclouen el fibrat tangent unitari de qualsevol quocient compacte del semiplà superior. D'altra banda, l'existència d'alguna hiperbolicitat condueix a l'existència de varietats estables i inestables, és a dir, de varietats invariants al llarg de les quals la dinàmica, respectivament, contrau i expandeix. Això dóna lloc a una estructura rica en el conjunt hiperbòlic, que dóna lloc a una «estructura producte local», en què les varietats estables i inestables s'intersequen transversalment quan estan prou a prop.

Una altra branca principal de la teoria dels sistemes dinàmics és la teoria ergòdica, que es pot descriure com l'estudi de les aplicacions i dels fluxos mesurables, i més en general de les accions d'un grup, que conserven una mesura. En particular, la teoria estudia les propietats estocàstiques de la dinàmica, com l'ergodicitat, que indiquen un comportament pròxim al que es podria descriure com aleatori. Els orígens de la teoria ergòdica es remunten a la mecànica estadística com un intent d'aplicar la teoria de probabilitat als sistemes mecànics conservatius amb molts graus de llibertat. Per exemple, per a un sistema definit per un Hamiltonià, es dedueix del teorema de Liouville que el volum

en l'espai de fase és invariant sota la dinàmica. A causa de la ubiqüitat de les equacions de Hamilton en la mecànica, això produeix una gran classe d'exemples «naturals» de fluxos que preserven mesura i de fet també d'aplicacions que preserven mesura, simplement prenent qualsevol temps fix del flux.

De fet, la teoria ergòdica és un altre punt de partida fonamental per a l'estudi del comportament estocàstic. Per tal d'explicar en termes simples perquè és així, primer descriuré un dels resultats bàsics i alhora fonamentals de la teoria ergòdica: el teorema de recurrència de Poincaré (que va aparèixer en el treball fonamental de Poincaré sobre el problema dels tres cossos, ja en la versió que conté l'error que va ser tan influent en la teoria dels sistemes dinàmics, però això seria una altra història). El teorema estableix que qualsevol dinàmica que preservi una mesura finita exhibeix una recurrència en qualsevol conjunt de mesura positiva, en el sentit que l'òrbita de gairebé tots els punts en el conjunt retorna infinitament sovint a aquest conjunt. Això es descriu generalment com a *recurrència no trivial*. Per exemple, per a la rotació d'un disc amb angle fix, que conserva àrea, si comencem amb una llesca angular del disc i mantenim girant-la, en algun moment intersecarà algunes de les antigues llesques en un conjunt d'àrea positiva (el teorema de recurrència de Poincaré ens diu més perquè garanteix que gairebé tots els punts de la llesca tornaran infinitament sovint a la mateixa llesca). Això és simplement una conseqüència del fet que si totes les llesques fossin disjuntes o s'intersequessin com a molt al llarg de les seves fronteres, com que n'hi hauria un nombre infinit, l'àrea del disc seria infinita.

La interacció entre la hiperbolicitat i la recurrència no trivial té una conseqüència profunda que origina una estructura orbital molt rica. En termes senzills, la recurrència proporcionada per una mesura invariant finita implica que hi ha òrbites que tornen arbitràriament a prop del punt des del qual van partir. D'altra banda, l'existència d'alguna hiperbolicitat condueix a l'existència de varietats estables i inestables transversals, que per tant origina l'existència de punts homoclínics transversals. Com ja va ser observat per Poincaré, aquests punts condueixen a una tremenda complexitat de la dinàmica (incloent l'aparició de ferradures de Smale). Això il·lustra que la teoria ergòdica de dinàmica hiperbòlica és un context natural per a l'estudi del comportament estocàstic.

No obstant això, la teoria general és sovint molt més complicada. Per exemple, considerem una dinàmica amb almenys un exponent de Ljapunov diferent de zero. Aquests són nombres que mesuren la taxa de creixement exponencial quan el temps tendeix a infinit, i per tant si un exponent de Ljapunov és positiu o negatiu, llavors la dinàmica corresponent, respectivament, expandeix o contrau. Resulta de la teoria que si la dinàmica, per exemple, conserva la mesura de Lebesgue, aleshores l'existència d'un exponent de Ljapunov diferent de zero implica que l'entropia és positiva, fet que s'interpreta com una indicació de l'existència de comportament caòtic. Però el panorama en termes de les varietats invariants estables i inestables és molt més complicat: les seves mides poden variar (mesurablement) de punt a punt i de fet poden disminuir de manera exponencial al llarg d'una òrbita. Això provoca greus dificultats quan intentem obtenir interseccions transversals, ja que una òrbita de fet pot estar cada vegada més a prop del seu punt de partida, a causa de la recurrència, però al mateix temps les mides de les varietats invariants poden estar disminuint cap a zero.

Discussió d'alguns treballs de Sinai

Sinai ha contribuït de forma fonamental a les àrees dels sistemes dinàmics, la teoria ergòdica i la física estadística, desentranyant connexions profundes entre elles. Això inclou el desenvolupament de mètodes de teoria de la mesura per a l'estudi dels sistemes dinàmics diferenciables.

Els treballs de Sinai inclouen la introducció del que avui s'anomena entropia de Kolmogorov–Sinai, la construcció de particions de Markov per a sistemes uniformement hiperbòlics (que condueix a una codificació simbòlica del sistema i, conseqüentment, a la simplificació de molts arguments), l'estudi d'una classe de billars amb una demostració d'algunes propietats ergòdiques (com per a les molècules en un gas), la introducció de mesures de Gibbs en la teoria ergòdica (avui dia sovint anomenades mesures de Sinai–Ruelle–Bowen, que permeten estendre un argument de Hopf

per establir l'ergodicitat a situacions en les quals el teorema de Fubini no es pot aplicar), la descripció de l'espectre de l'operador quasi-periòdic de Schrödinger (demostrant la localització de les funcions pròpies), la construcció amb Bunimovich i Chernov de particions de Markov per billars i per l'aplicació de Lorenz, el desenvolupament amb Bunimovich i amb Pesin de la teoria matemàtica del caos en l'espai-temps, i amb Khanin, Mattingly i Li l'estudi de la hidrodinàmica i de les equacions de Navier–Stokes. Faig èmfasi en el fet que aquesta llista està lluny de ser exhaustiva.

A continuació vaig a discutir, en la mesura que sigui possible, tres impressionants assoliments de Sinai.

El primer assoliment es refereix a l'entropia, una quantitat que essencialment mesura la complexitat d'una dinàmica (des del punt de vista d'una mesura invariant). La noció d'entropia va ser introduïda a la teoria dels sistemes dinàmics per Kolmogorov, en un moment en què havia acabat de publicar les bases per la teoria KAM i estava interessat en la teoria de la informació. La creença inicial era que l'entropia permetria distingir els sistemes dinàmics «deterministes» del sistemes dinàmics «aleatoris». Noto que Kolmogorov només va introduir la noció d'entropia per a la classe dels sistemes quasi-regulars, avui dia anomenats sistemes K. Sinai, que en aquest moment era estudiant de Kolmogorov, va ser capaç d'ampliar la definició de l'entropia a tots els sistemes dinàmics. Segons descrit pel mateix Sinai, primer va intentar demostrar que l'entropia d'un automorfisme del tor dos dimensional és zero, ja que és un sistema dinàmic «determinista». Sense èxit, va ensenyar els seus resultats a Kolmogorov, qui va observar que l'entropia devia de ser positiva. Poc després Sinai va ser de fet capaç de demostrar-ho, donant així el primer exemple d'un sistema dinàmic «determinista» (l'acció d'una matriu constant el en tor dos dimensional) amb una entropia positiva, fet que indica la presència simultània tant de comportament «determinista» com de comportament «aleatori». Avui dia, l'entropia de Kolmogorov–Sinai s'ha convertit en una de les nocions centrals en l'estudi de la complexitat.

El segon assoliment es refereix a les particions de Markov per a sistemes uniformement hiperbòlics. La noció de partició de Markov va ser introduïda per primera vegada per Sinai, que també va demostrar que l'espai de fases de qualsevol difeomorfisme d'Anosov (un difeomorfisme en una varietat compacta que és ella mateixa un conjunt hiperbòlic) té associades particions de Markov. En termes senzills, la idea és dividir l'espai de fases d'una dinàmica de tal manera que la codificació corresponent obtinguda d'anar al llarg d'una òrbita és «quasi» una bijecció entre la dinàmica original i la dinàmica simbòlica obtinguda a partir d'aquesta codificació. La propietat de Markov per a una partició implica que totes les seqüències possibles al llarg dels elements de la partició són efectivament assolides per alguna òrbita. Una altra conseqüència és que qualsevol mesura invariant condueix naturalment a una mesura de Markov en la dinàmica simbòlica, il·lustrant així, una vegada més, com un sistema determinista pot presentar fortes propietats estocàstiques. D'altra banda, les particions de Markov tenen un paper important en l'estudi de la interacció entre la teoria dels sistemes dinàmics hiperbòlics i la mecànica estadística d'equilibri.

Finalment, el tercer assoliment es refereix a la teoria dels billars. Sinai va establir les bases d'aquesta teoria amb l'objectiu principal d'investigar les propietats estocàstiques dels sistemes dinàmics conservatius. Un exemple simple és un quadrat amb un obstacle circular en el seu centre tal que en el seu interior viatja una partícula que rebota elàsticament quan colpeja qualsevol de les fronteres del quadrat o de l'obstacle circular. En particular, Sinai va establir les propietats estocàstiques per la classe dels billars tals que les seves fronteres tenen curvatura positiva a tot arreu. Per tal de descriure el que està pel darrere d'aquest estudi, consideraré només el cas més simple dels sistemes uniformement hiperbòlics sense singularitats, com els sistemes Anosov (també podríem considerar per exemple fluxos geodèsics en superfícies compactes de curvatura negativa). Anosov va estudiar els sistemes que ara porten el seu nom i va establir, en particular, l'existència de famílies de varietats estables i inestables. Sinai va utilitzar aquestes famílies per demostrar que es pot aplicar un argument de tipus Fubini i després usar l'argument de Hopf per establir l'ergodicitat del sistema. El problema principal és que al contrari del que

succeeix en el teorema de Fubini, no se sap *a priori* si un conjunt de mesura zero en una varietat estable es pot transportar al llarg de les varietats inestables cap a un conjunt de mesura positiva en una altra varietat estable. Això requereix l'establiment d'una propietat fonamental: la continuïtat absoluta de les famílies de les varietats estables i inestables, que consisteix a mostrar que el conjunt de mesura zero abans esmentat es pot de fet transportar cap a un conjunt de mesura zero en la segona varietat estable.

Luis Barreira
Universitat de Lisboa

Parlem de llibres

Jaume Vallcorba i Plana, *in memoriam*

Bruno Snell. *Die Entdeckung des Geistes. Studien zur Entstehung des europäischen Denkens bei den Griechen.* Editorial, Hubert & Co. Göttingen, 1946. ISBN Print. 978-3-25779 -9. ISBN llibre electrònic:. 978-3-647-25731-0. Traducció anglesa de T. G. Rosenmeyer, *The Discovery of the Mind. The Greek Origins of European Thought.* Oxford: Basil Blackwell, 1953. Vegeu `https://archive.org/details/discoveryofmindg00sneluoft`. Traducció castellana de J. Fontcuberta, *El descubrimiento del espíritu. Estudios sobre la génesis del pensamiento europeo en los griegos.* Barcelona: Acantilado, 2000. ISBN. 978-84-96834-22-4.

Nuccio Ordine. *L'utilità dell'inutile: Manifesto.* Editorial, rcs Libri SpA, Bompiani: Milà, 2013. ISBN: 978-2251444888. Traducció catalana de Jordi Bayod, *La utilitat de l'inútil*, amb un assaig d'Abraham Flexner. Quaderns Crema, SA: Barcelona, 2013. ISBN: 978-84-7727-553-4.

Finia ja el mes d'agost, el mes en què molts —gairebé tots— estàvem de vacances, alguns a la vora de casa, d'altres en indrets de la Mediterrània, tot recordant d'on venim, i encara uns altres a terres més llunyanes. I arribà la notícia de la mort d'en Jaume, filòleg i editor independent, puntal de l'edició independent catalana. Un tumor cerebral ens l'havia pres. Tenia només seixanta-cinc anys, però l'herència que deixa darrere seu és enorme. Per això, en l'acte públic del 2 de juny, en reconeixement de la bona feina feta, la Generalitat de Catalunya li lliurava el Premi Nacional de Cultura a la projecció social de la llengua catalana.

Parlo d'ell perquè l'any 1979 fundava, amb seu a Barcelona, l'editorial Quaderns Crema amb l'objectiu clar de combinar prosa i poesia —d'autors catalans i estrangers— amb una especial voluntat d'incorporar a la literatura catalana traduccions acurades de clàssics. I vint anys més tard, el 1999, fundà Acantilado, de llibres en castellà, entre els quals trobem llibres d'alta divulgació —d'un gran bagatge cultural.

Qui no recorda —espigolant en la memòria— haver-hi llegit la poeticològica *Alícia a través de l'espill* de Lewis Carroll, l'obra sinistra d'Edgar Allan Poe, la serena reflexió d'Òscar Wilde, *De Profundis*, la visionària i al·legòrica *Vita nova* de Dante Alighieri, o el dietari exòtic de Paul Gauguin *Noa Noa. Estada a Tahití*, i, al costat d'aquestes i moltíssimes altres, l'obra poètica de Josep Vicenç Foix, les reflexions sobre el llenguatge de Gabriel Ferraté o *Exercicis d'estil* de Raymond Queneau, i moltes de les obres de Quim Monzó?

Recordo com si fos ara quan vaig descobrir el vessant històric i polític de Stefan Zweig. Era també un mes d'agost —ja han passat uns anys— i ens trobàvem a Llers, a la casa d'estiueig de la Neus i en Miquel, germà de la Margarida, la Margarida i jo —la mateixa caseta on Cesc Gai havia rodat *Ficció*—, contemplant, just davant nostre, imponent, el massís del Cadí. Un dels llibres que hi havia damunt la tauleta de davant la llar de foc, apagada —feia calor—, era *Moments estel·lars de*